18. EDO's lineares de ordem n

Definição 18.0.1 Uma EDO linear de ordem n tem forma

$$P_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_0(x)y = G(x) \tag{18.1}$$

Se $G(x) \not\equiv 0$, a equação (18.1) chama-se *não-homogênea*. Se $G(x) \equiv 0$, a equação (18.1) chama-se *homogênea*.

Suponha que $P_n(x) \neq 0$ em intervalo I, logo dividindo (18.1) por $P_n(x)$ temos:

$$L(y) := \frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = g(x). \tag{18.2}$$

ou $L(y) = g(x)$. Dizemos que $L(y) = 0$ é *equação homogênea associada* a (18.2).

■ **Exemplo 18.1**

$$\operatorname{sen} x \cdot y''' + x \cdot y'' + y' \cdot e^x + x^2 \cdot y = \cos x.$$

No intervalo, $I = (0, \pi)$, $P_3(x) = \operatorname{sen} x \neq 0$, assim

$$y''' + \frac{x}{\operatorname{sen} x}y'' + \frac{e^x}{\operatorname{sen} x}y' + \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}y = \operatorname{ctg} x.$$

Neste caso: $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $p_2(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$, $p_1(x) = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}$ e $p_0(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x}$.

Consideremos o problema do valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x)y = g(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n+1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{18.3}$$

Teorema 18.0.1 — da Existência e unicidade. Se as funções $p_0,\dots,p_{n-1},g$ forem continuas em intervalo I e $x_0\in I$, PVI (18.3) tem única solução em I.

■ **Exemplo 18.2** Resolve

$$\begin{cases} y''=-y,\\ y(0)=3,\\ y'(0)=1.\end{cases}$$

Solução. Temos que $y''+y=0$ é homogênea com $p_1=0$ e $p_0=1$. Observe que

$$\begin{cases} y_1=\operatorname{sen}x,\\ y_2=\cos x.\end{cases}$$

são as soluções particulares e $y=c_1\operatorname{sen}x+c_2\cos x$ é solução geral (vamos justificar isso na próxima aula). Temos que $y'=c_1\cos x-c_2\operatorname{sen}x$, portanto $y(0)=c_2=3$ e $y'(0)=c_1=1$. Resumindo obtemos a solução do PVI

$$y=\operatorname{sen}x+3\cos x.$$

;-)

Sejam y_1 e y_2 soluções de (18.2), logo pela linearidade

$$L(y_1-y_2)=L(y_1)-L(y_2)=g(x)-g(x)=0,$$

então $y_h=y_1-y_2$ é solução da equação homogênea $L(y)=0$. Como $y_1=y_h+y_2$, toda solução de (18.2) tem forma

$$y=y_h+y_p,$$

onde $L(y_h)=0$, e y_p é solução particular da equação não-homogênea $L(y_p)=g(x)$.

18.1 A equação homogênea.

Teorema 18.1.1 Sejam $y_1,\dots y_n$ soluções da equação $L(y)=0$:

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_0(x)y=0,$$

em intervalo I. Assim

$$c_1y_1+\cdots+c_ny_n,$$

com $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ também é a solução.

Obs Soluções de $L(y)=0$ formam um espaço vetorial, e portando existe uma base nesse espaço!

Definição 18.1.1 1) $y_1, \dots y_n$ são linearmente independentes (LI) em I se e somente se

$$\lambda_1 y_1(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) \equiv 0, \quad \forall x \in I$$

implica que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

2) O conjunto de soluções $\{y_1, \dots y_n\}$ LI da $L(y) = 0$ é dito *fundamental*.

Teorema 18.1.2 Seja $\{y_1, \dots, y_n\}$ um conjunto fundamental de $L(y) = 0$ em I e $p_i(x)$, $i = 1, \dots, n-1$, continuas em I. Então, se y for solução de $L(y)$, existem os constantes $c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

ou seja $\{y_1, \dots, y_n\}$ é a base no espaço das soluções da equação $L(y) = 0$.

Corolario 18.1.3 Toda solução de $L(y) = g(x)$ tem forma

$$y = c_1 y_1 + \dots c_n y_n + y_p,$$

onde $\{y_1, \dots, y_n\}$ é conjunto fundamental de $L(y) = 0$ e y_p é solução particular de $L(y) = g(x)$.

■ **Exemplo 18.3** Resolve PVI

$$\begin{cases} y'' + 4y = 13e^{3x} = g(x), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solução. Solução geral tem forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$$

Temos que $y_p = e^{3x}$. De fato, $y_p'' = 9e^{3x}$, assim $9e^{3x} + 4e^{3x} = 13e^{3x}$. Procuremos o sistema fundamental,

$$\begin{aligned} y'' + 4y = 0 &\Longrightarrow y'' = -4y \\ &\Longrightarrow \begin{cases} y_1 = \operatorname{sen} 2x, \\ y_2 = \cos 2x. \end{cases} \\ &\Longrightarrow y_h = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x. \end{aligned}$$

Assim $y = y_h + y_p = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + e^{3x}$ é a solução geral.

Como $y(0) = c_2 + 1 = 1$, temos $c_2 = 0$. Por outro lado, $y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \operatorname{sen} 2x + 3e^{3x}$ e $y'(0) = 2c_1 + 3 = 0$, assim $c_1 = -\frac{3}{2}$. Resumindo,

$$y = -\frac{3}{2} \operatorname{sen} 2x + e^{3x}$$

é solução do PVI. ;-)

Como testar independência linear das soluções $\{y_1,\dots y_n\}$?
Pela Definição 2, $\{y_1,\dots y_n\}$ são LI se e somente se

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x)+\cdots+\lambda_n y_n(x)\equiv 0,\\ \lambda_1 y_1'(x)+\cdots+\lambda_n y_n'(x)\equiv 0,\\ \vdots\\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x)+\cdots+\lambda_n y_n^{(n-1)}(x)\equiv 0, \end{cases}$$

em I implica que $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. Seja $x=x_0$, logo obtemos um sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0)+\cdots+\lambda_n y_n(x_0)= 0,\\ \lambda_1 y_1'(x_0)+\cdots+\lambda_n y_n'(x_0)= 0,\\ \vdots\\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+\cdots+\lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0)= 0. \end{cases}$$

Temos o sistema homogênea das equações lineares das incógnitas $\lambda_1,\dots\lambda_n$. Assim, se

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n)(x_0)=\det\begin{bmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0)\end{bmatrix}\neq 0.$$

obtemos $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. O determinante $W(y_1,\dots y_n)$ chama-se *Wronskiano*.

Obs Sejam $y_1,\dots y_n$ soluções de $L(y)=0$. Se $W(y_1,\dots,y_n)\neq 0$ para algum $x_0\in I$, assim $y_1,\dots y_n$ são LI e portanto formam conjunto fundamental para $L(y)=0$.

■ **Exemplo 18.4** Verifique se as funções $f_1=x$, $f_2=x\ln x$, $f_3=x^2$ forem LI.

Solução. Temos que

$$W(f_1,f_2,f_3)=\det\begin{bmatrix} x & x\ln x & x^2\\ 1 & \ln x+1 & 2x\\ 0 & \frac{1}{x} & 2\end{bmatrix}=2x\ln x+2x+x-(2x\ln x+2x)=x\neq 0$$

para $x\neq 0$, portanto f_1,f_2,f_3 são LI. ;-)

Teorema 18.1.4 — de Liouville. Sejam $\{y_1,\dots y_n\}$ soluções da equação

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_0(x)y=0,$$

assim

$$W(y_1,\dots y_n)=K\cdot\exp(-\int p_{n-1}dx).$$

Corolario 18.1.5 Se $K \neq 0$, assim $W \neq 0$ para todo $x \in I$.

Veja aplicação importante do Teorema de Liouville:

■ **Exemplo 18.5** Ache todas as soluções de

$$2x^2y'' + (2x - 4x^2)y' + (3x^2 - 2x - 2)y = 0,$$

para $x > 0$, sabendo que $y_1 = xe^x$ é uma das soluções.

Solução. Temos que $n = 2$. Como $x > 0$, podemos dividir a equação por x^2:

$$y'' + \frac{1-2x}{x}y' + \frac{3x^2-2x-2}{2x^2}y = 0.$$

Seja $\{y_1, y_2\} = \{xe^x, y_2\}$ conjunto fundamental da equação. Assim

$$W(y_1, y_2)(x) = \det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xe^x & y_2 \\ e^x + xe^x & y_2' \end{bmatrix} = xe^x y_2' - e^x(1+x)y_2.$$

De outro lado, pelo Teorema de Liouville

$$W(y_1,y_2)(x) = K \cdot \exp(-\int p_1 dx) = K \cdot \exp(-\int (1/x - 2)dx) = K \cdot \exp(-\ln x + 2x + c_1) = K_1 \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{2x}.$$

Assim

$$x \cdot e^x \cdot y_2' - e^x(1+x)y_2 = K_1 \frac{e^{2x}}{x}.$$

Portanto,

$$y_2' - \frac{1+x}{x}y_2 = K_1 \frac{e^x}{x^2}$$

é equação linear de 1a ordem, logo

$$y_2(x) = \exp(-\int p dx)\Big(C + \int g(x)\exp(\int p(x)dx)dx\Big).$$

Temos

$$\int p dx = \int (-\frac{1}{x} - 1)dx = -\ln x - x + C_2,$$

entao

$$\exp(\int p dx) = e^{-\ln x - x + C_2} = \frac{C_3}{xe^x},$$

e

$$\int g \exp(\int p dx)dx = \int \frac{e^x}{x^2} \cdot \frac{C_3}{xe^x}dx = -\frac{C_4}{.}2x^2 + C_5$$

Resumindo temos

$$y_2 = \frac{xe^x}{c_3}(C - \frac{C_4}{2x^2} + C_5) = xe^x(\tilde{C} + \frac{1}{x^2}).$$

Para $\tilde{C} = 0$ obtemos $y_2 = \dfrac{e^x}{x}$ e $\{y_1, y_2\}$ é sistema fundamental. Assim,

$$y(x) = C_1 xe^x + C_2 \frac{e^x}{x}$$

é solução geral da equação inicial, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. ;-)